ALDO GHIZZETTI

La trasformazione di Laplace e il calcolo simbolico degli elettrotecnici

Conferenza tenuta il 25 gennaio 1940-XVIII

L'argomento che mi propongo di trattare ha già formato oggetto di precedenti conferenze tenute in questo Seminario dai Professori G. FUBINI (1) ed F. TRICOMI (2) e da S. E. G. GIORGI (3) nel periodo 1934-36; cercherò pertanto nella mia esposizione di evitare il più possibile argomenti già esposti, proponendomi sopratutto di illustrare la possibilità di applicazioni pratiche (4).

Il *Calcolo simbolico degli Elettrotecnici* può essere impostato secondo due diversi punti di vista, secondochè si usa il cosidetto *Calcolo degli operatori* (HEAVISIDE, GIORGI, ...) ovvero i metodi fondati sull' uso della *trasformazione di Laplace.* Qui mi riferirò a questo secondo punto di vista, che in questi ultimi anni è stato particolarmente messo in evidenza da G. DOETSCH (5).

1. — Ricorderò anzitutto la definizione e le proprietà fondamentali della *trasformazione di Laplace.* Data una funzione $F(t)$ della variabile t, definita per $t > o$, si chiama sua *trasformata di Laplace* la funzione $f(p)$ così definita:

$$f(p) = \int_o^\infty e^{-pt} F(t)\, dt \; ; \tag{1}$$

(1) G. FUBINI, *Introduzione ai metodi simbolici di calcolo* (19 febbraio 1934-XII) e *Una lezione sul calcolo funzionale degli elettrotecnici* (27 gennaio 1936-XIV).

(2) F. TRICOMI, *Sulla trasformazione di Laplace* (11 aprile 1935-XIII).

(3) G. GIORGI, *Questioni sul calcolo operatorio funzionale* (27 aprile 1936-XIV).

(4) Una conferenza analoga a questa, e col titolo: *Il calcolo degli operatori nello studio dei problemi tecnici,* è stata da me tenuta il 25 febbraio 1939-XVII al II Convegno di Matematica Applicata in Roma. Un riassunto di essa è stato pubblicato nel Bollettino dell'Unione Matematica Italiana (serie II, anno I, n. 3, 1939-XVII, pag. 297-299); il testo completo è in corso di stampa nei Rendiconti del Convegno.

(5) G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* (Berlin, 1937).

si suole scrivere brevemente

$$f(p) = \mathfrak{L}[F(t)] \ .$$

Si ammette naturalmente che la funzione $F(t)$ sia tale che l'integrale (1) risulti convergente per qualche valore di p; in queste condizioni si dimostra che, pensando p come una variabile complessa $x + jy$, ad ogni siffatta funzione $F(t)$ corrisponde un ben determinato numero β *(ascissa di convergenza)* tale che l'integrale (1) risulta convergente per tutti i valori di p la cui parte reale x supera β, e non convergente per $x < \beta$. All' integrale (1) resta quindi associato, nel piano della variabile complessa p, un certo *semipiano di convergenza* (fig. 1).

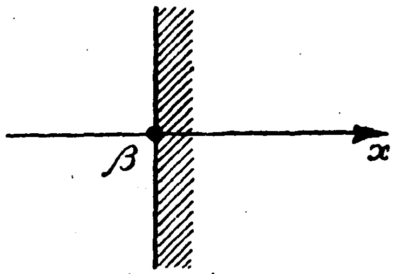

Fig. 1

Esempi immediati sono i seguenti:

$$\mathfrak{L}[c] = \frac{c}{p} \qquad \text{(con } \beta = o\text{)} \tag{2}$$

$$\mathfrak{L}[e^{kt}] = \frac{1}{p-k} \qquad \text{(con } \beta = \xi, \text{ se } k = \xi + j\eta\text{)} \tag{3}$$

$$\mathfrak{L}\left[\frac{t^n}{n!} e^{kt}\right] = \frac{1}{(p-k)^{n+1}} \qquad (\quad \text{»} \quad , \quad \text{»} \quad). \tag{4}$$

La proprietà fondamentale della trasformazione di Laplace è espressa dalla formola seguente:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{dF}{dt}\right] = p \, . \, f(p) - F(o) \tag{5}$$

dalla quale discende subito l'altra

$$\mathfrak{L}\left[\int_o^t F(t)\, dt\right] = \frac{1}{p} \, . \, f(p) \ . \tag{6}$$

Inoltre, date due funzioni $F(t)$, $G(t)$ e definito il loro *prodotto integrale* (FALTUNG) $F(t) * G(t)$ secondo la

$$F(t) * G(t) = \int_o^t F(\tau)\, G(t-\tau)\, d\tau \ , \tag{7}$$

sussiste la proprietà

$$\mathfrak{L}\,[F(t) * G(t)] = f(p)\,.\,g(p)\,. \tag{8}$$

Accennerò appena al problema dell'*inversione* della trasformazione di Laplace, cioè al problema di risalire alla $F(t)$ quando si conosce la $f(p)$. Si dice che la $F(t)$ è l'*antitrasformata* della $f(p)$ e si scrive

$$F(t) = \mathfrak{L}^{-1}\,[f(p)]\ ;$$

va avvertito però che, affinchè esista l'*antitrasformata* $F(t)$, la $f(p)$ deve soddisfare ad un complesso di condizioni che restringono assai il campo delle funzioni a cui è applicabile la $\mathfrak{L}^{-1}$. Per esempio restano escluse da tale campo *le costanti* ed i *polinomi.*

2. — Le poche nozioni precedenti sono già sufficienti a sviluppare tutta la teoria dei *circuiti elettrici a costanti concentrate.* Consideriamo per es. un circuito elettrico con induttanza L, resistenza R e capacità C in serie (fig. 2); il circuito è *a riposo* per $t < o$, all'istante $t = o$ si inserisce una f. e. m. $V(t)$ comunque variabile nel tempo. Per $t > o$ la corrente $I(t)$ è definita dal soddisfare all'equazione

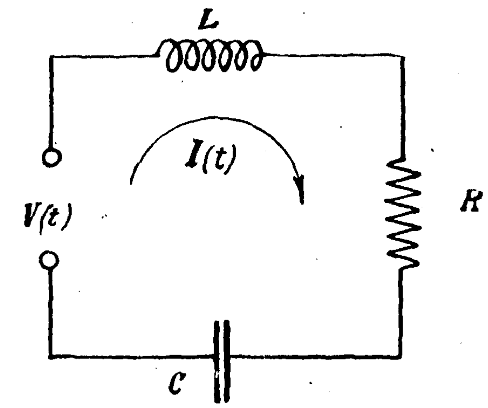

Fig. 2

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int_o^t I\,dt = V(t) \tag{9}$$

ed alla condizione iniziale

$$I(o) = o\,. \tag{10}$$

Applicando ai due membri di (9) la trasformazione di Laplace e tenendo conto di (5), (10) e di (6), si trova

$$\left(Lp + R + \frac{1}{Cp}\right) i(p) = v(p) \tag{11}$$

avendo posto

$$i(p) = \mathfrak{L}\,[I(t)] \quad , \quad v(p) = \mathfrak{L}\,[V(t)]\,.$$

Dalla (11) si deduce

$$i(p) = \frac{p}{Lp^2 + Rp + \dfrac{1}{C}}\,.\,v(p) \tag{12}$$

e così è nota la trasformata di Laplace della corrente richiesta $I(t)$. Per avere quest' ultima basterà calcolare la antitrasformata $F(t)$ della frazione razionale *propria*

$$f(p) = \frac{p}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} \tag{13}$$

perchè, dopo ciò, la (8) ci permetterà senz'altro di concludere

$$I(t) = F(t) * V(t) . \tag{14}$$

Ora la $F(t)$ si calcola assai facilmente decomponendo la frazione (13) nella somma di due frazioni semplici del tipo $\frac{A}{p-k}$, con k radice dell'*equazione caratteristica*

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0 , \tag{15}$$

ed applicando successivamente la (3) [1].

Si ha così un procedimento per integrare la (9) che, se non offre particolari vantaggi rispetto ai metodi classici, è però particolarmente adatto al nostro problema giacchè esso ci consente di nemmeno scrivere l'equazione (9), ma di scrivere direttamente la (11).

Pensiamo infatti di associare al dato circuito di fig. 2 un *circuito fittizio,* puramente ohmico, dedotto da quello col sostituire all' induttanza L una resistenza o *impedenza simbolica* Lp ed alla capacità C una conduttanza o *ammettenza simbolica* Cp (fig. 3); nel circuito agirà quindi una resistenza complessiva data da $Lp + R + \frac{1}{Cp}$ e, se pensiamo che esso sia alimentato dalla f. e. m. *fittizia* $v(p)$ e percorso dalla corrente *fittizia* $i(p)$, l'applicazione della legge di Ohm ci conduce subito alla (11).

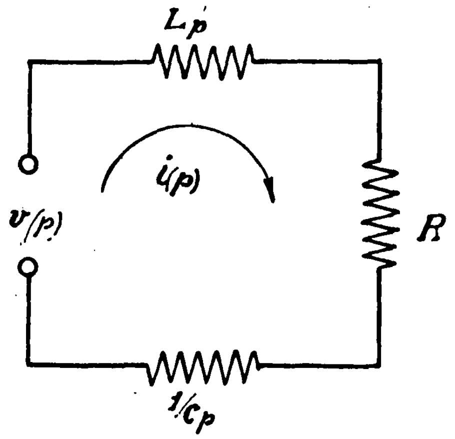

Fig. 3

[1] Se la (15) ha radice doppia, occorrerà anche invocare la (4) con $n = 1$. In ogni caso, da (3), (4) risulta che l'ascissa di convergenza β dell' integrale di Laplace

$$\int_0^\infty e^{-pt} F(t)\, dt = f(p)$$

Nasce così un algoritmo simbolico che permette di scrivere immediatamente, col solo ricorso alle leggi elementari di Kirchhoff, le relazioni lineari che devono intercedere fra le trasformate di Laplace delle grandezze elettriche in gioco durante il funzionamento di una rete di circuiti elettrici.

Questo algoritmo presenta evidentemente una forte analogia coll'ordinario *Calcolo simbolico di Steinmetz* usato per determinare il regime di un circuito elettrico in corrente alternata sinusoidale. Vediamo di mettere in relazione i due metodi.

3. — Continuiamo per semplicità a riferirci al circuito di fig. 2 e supponiamo che la f. e. m. $V(t)$ sia sinusoidale: p. es.

$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

o meglio, usando le notazioni *complesse:*

$$V(t) = V_0 e^{j\omega t} .$$

Sostituendo questa espressione di $V(t)$ nella (14) e scrivendo esplicitamente il prodotto integrale secondo la (7), troviamo

$$I(t) = V_0 e^{j\omega t} \int_0^t e^{-j\omega\tau} F(\tau) d\tau . \tag{16}$$

Proponiamoci ora di calcolare l'espressione di regime $\mathfrak{J}(t)$ di questa corrente $I(t)$, applicando il metodo di Steinmetz. Questo metodo consiste essenzialmente nell'applicare la legge di Ohm ad un circuito fittizio che proviene dal dato col sostituire all'induttanza L ed alla capacità C rispettivamente una impedenza simbolica $j\omega L$ ed un'ammettenza simbolica $j\omega C$; ne segue per la corrente di regime $\mathfrak{J}(t)$ l'equazione

$$\left(j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}\right) \mathfrak{J}(t) = V_0 e^{j\omega t} . \tag{17}$$

Confrontando quest'ultima colla (11), è immediato riconoscere che, come da quella si era dedotto $i(p) = f(p) . v(p)$ (cfr. (12) e (13)), così da questa si trae

$$\mathfrak{J}(t) = f(j\omega) . V_0 e^{j\omega t} . \tag{18}$$

è uguale alla più grande fra le parti reali ξ delle radici k dell'equazione caratteristica (15). Ora le radici di (15) hanno evidentemente parte reale negativa (o nulla, se $R = o$); è perciò $\beta \leqslant o$.

Dalle (16), (18) risulta che si può porre

$$I(t) = \mathfrak{I}(t) + V_0 \, e^{j\omega t} \, . \, \varepsilon(t) \tag{19}$$

con

$$\varepsilon(t) = \int_0^t e^{-j\omega\tau} F(\tau) \, d\tau - f(j\omega) \, . \tag{20}$$

Ciò premesso, teniamo presente che $f(p)$ è la trasformata di Laplace della $F(t)$; si ha cioè

$$\int_0^\infty e^{-p\tau} F(\tau) \, d\tau = f(p) \tag{21}$$

ossia

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t e^{-p\tau} F(\tau) \, d\tau = f(p)$$

per tutti i valori di p la cui parte reale supera l'ascissa di convergenza β dell' integrale di Laplace (21); sappiamo (cfr. nota [1] di pag. 6) che $\beta \leqslant 0$.

Se $\beta < 0$ (il che avviene quando $R \neq 0$) è lecito porre nella (21) $p = j\omega$ e dedurre

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t e^{-j\omega\tau} F(\tau) \, d\tau = f(j\omega)$$

vale a dire, per la (20)

$$\lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = 0 \, .$$

In tal caso, per la (19), si ha

$$\lim_{t \to \infty} [I(t) - \mathfrak{I}(t)] = 0$$

e ciò fa apparire la $\mathfrak{I}(t)$ come effettiva *corrente di regime.* La differenza $I(t) - \mathfrak{I}(t)$ rappresenta la *corrente transitoria* che tende a zero al crescere di t (con andamento sinusoidale smorzato).

Se invece $\beta = 0$ (il che implica $R = 0$) non è più lecito porre $p = j\omega$ nella (21) e non si può più concludere $\lim\limits_{t \to \infty} \varepsilon(t) = 0$. La differenza $I(t) - \mathfrak{I}(t)$ non tende a zero, ossia non ha più carattere transitorio (è sinusoidale, senza smorzamento). È quasi superfluo rilevare che questo è un caso ideale.

4. — Le cose dette con riferimento al semplice circuito di fig. 2 si estendono al caso più generale di una qualsiasi rete di circuiti elettrici (a costanti concentrate). Supposto sempre che la rete sia a riposo per $t < 0$, il suo funzionamento per $t > 0$ dipenderà da un sistema di n equazioni del tipo

$$(22) \qquad \sum_{k=1}^{n} \left(L_{ik} \frac{d I_k}{d t} + R_{ik} I_k + \frac{1}{C_{ik}} \int_0^t I_k \, d t \right) = V_i(t) \ , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

nelle n correnti incognite $I_1(t)$, $I_2(t)$, ..., $I_n(t)$, colle condizioni iniziali

$$I_k(0) = 0 \quad , \quad (k = 1, 2, \ldots\ldots, n) \ .$$

La trasformazione di Laplace muta le (22) nelle

$$(23) \qquad \sum_{k=1}^{n} \left(L_{ik} + R_{ik} + \frac{1}{C_{ik} p} \right) i_k(p) = v_i(p) \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

che possiamo, volendo, scrivere direttamente ragionando su una rete di circuiti fittizi dedotta da quella data nel modo indicato al n. 2.

Le (23) costituiscono un sistema di n equazioni di 1° grado nelle n incognite $i_k(p)$ ed è ovvio che, risolvendolo, si troveranno per le singole $i_k(p)$ espressioni del tipo

$$(24) \qquad i_k(p) = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}(p) \, v_i(p) \quad , \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

colle $f_{ik}(p)$ *funzioni razionali* di p.

Per risalire alle correnti effettive $I_k(t)$ occorre antitrasformare le $i_k(p)$ date dalle (24), e questo problema si riduce alla antitrasformazione di tante espressioni del tipo

$$(25) \qquad \frac{X(p)}{Z(p)} \, v(p)$$

con $X(p)$, $Z(p)$ *polinomi* in p e $v(p)$ trasformata di una f. e. m. nota $V(t)$.

Però in generale non si può più affermare che la frazione $\dfrac{X(p)}{Z(p)}$ sia una frazione propria (come accadeva nel caso semplice del n. 2). Si può però dimostrare che, detto ν il grado del denominatore $Z(p)$, il grado del numeratore $X(p)$ vale al massimo $\nu + 1$, cosicchè, nel caso più generale, l'espressione (25) sarà del tipo

$$\left[c\,p + g + \frac{X_1(p)}{Z(p)}\right] v(p) \tag{26}$$

con $\dfrac{X_1(p)}{Z(p)}$ frazione propria.

Se nella (26) è $c = g = o$, l'antitrasformazione si fa come si è indicato al n. 2: si calcola a parte l'antitrasformata $F_1(t)$ della frazione propria $\dfrac{X_1(p)}{Z(p)}$ (per mezzo della decomposizione in fratti semplici e successiva applicazione delle (3), (4)); dopo ciò si ha senz'altro che l'antitrasformata di (26) vale

$$F_1(t) * V(t)\ .$$

Se $c = 0$, $g \neq 0$ non vi è pure alcuna difficoltà per la determinazione dell'antitrasformata, che vale ovviamente

$$g\,V(t) + F_1(t) * V(t)\ .$$

Una difficoltà sorge invece nel caso $c \neq 0$. Tenuto conto della (5), la (26) può scriversi allora

$$c\,\mathfrak{L}\left[\frac{dV}{dt}\right] + g\,v(p) + \frac{X_1(p)}{Z(p)}\,v(p) + c\,V(0) \tag{27}$$

e sotto questa forma si vede chiaramente che la nostra espressione *non ammette una antitrasformata,* giacchè, mentre i primi tre termini sono rispettivamente antitrasformabili in

$$c\frac{dV}{dt}\quad,\quad g\,V(t)\quad,\quad F_1(t) * V(t)\ ,$$

l'ultimo termine *costante* $c\,V(o)$ è privo di antitrasformata (vedi fine del n. 1).

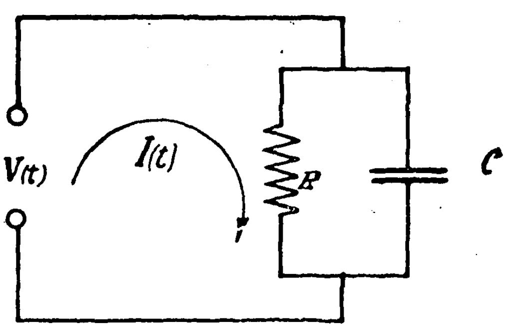

Fig. 4

Per superare questa difficoltà occorre allargare il concetto di funzione, introducendo le cosidette *funzioni impulsive.* Per rendere naturale questa introduzione, consideriamo il semplicissimo circuito di fig. 4, con capacità e resistenza in parallelo. Nel corrispondente circuito fittizio si hanno due ammettenze simboliche $C\,p$, $\dfrac{1}{R}$ in parallelo; esse equivalgono ad un'unica ammettenza $Cp + \frac{1}{R}$, onde l'equazione simbolica del circuito è

$$i(p) = (Cp + \frac{1}{R})\, v(p) .$$

Per la valutazione della corrente effettiva $I(t)$, abbiamo precisamente da antitrasformare un'espressione del tipo (26) con $c \neq o$; ponendola sotto la forma (27), possiamo scrivere

$$i(p) = C\,\mathfrak{L}\left[\frac{dV}{dt}\right] + \frac{1}{R}\, v(p) + C\,V(o) , \tag{28}$$

e di qui potremo passare ad $I(t)$ se, con qualche opportuna convenzione, riusciamo ad attribuire un'antitrasformata alla costante $C\,V(o)$.

A tale scopo, osserviamo che, all'atto della chiusura del circuito, la f. e. m. salta bruscamente dal valore *zero* al valore $V(o)$; è evidente, in base alla struttura del nostro circuito, che in conseguenza di ciò la carica del condensatore C salta bruscamente dal valore *zero* al valore $C\,V(o)$. Questa variazione brusca di carica deve corrispondere ad un *guizzo istantaneo* di corrente attraverso il circuito, cioè ad un passaggio di corrente per un intervallino di tempo $(0, \varepsilon)$ estremamente breve, corrente che non è possibile valutare al solito modo in funzione di t, ma della quale è solo accessibile l'effetto consistente nella suddetta variazione brusca di carica.

La rappresentazione matematica di questo guizzo di corrente non può quindi farsi con delle funzioni ordinarie (continue a tratti), perchè queste hanno un integrale continuo e non potrebbero quindi far risultare la discontinuità della carica. Occorre introdurre una nuova categoria di funzioni con integrale discontinuo, da pensarsi intuitivamente come funzioni nulle dappertutto tranne che in un piccolissimo intorno del punto $t = 0$ ove assumono valori (non precisabili, ma) così grandi che il loro integrale esteso a qualunque intervallo contenente il punto $t = o$ abbia un valore non nullo.

Preciseremo questo concetto ponendo questa definizione. Chiameremo *funzione impulsiva unitaria all'istante* $t = o$, e la indicheremo con $U(t)$, un ente caratterizzato dalla proprietà seguente:

$$\int_{-\infty}^{t} \Phi(\tau)\, U(\tau)\, d\tau = \begin{cases} o & (\text{per } t < o) \\ \Phi(o) & (\text{per } t \geqslant o) \end{cases} \tag{29}$$

che deve valere qualunque sia la funzione continua $\Phi(t)$. In particolare, per $\Phi(t) \equiv 1$, si ha

$$\int_{-\infty}^{t} U(\tau)\, d(\tau) = \begin{cases} o & (\text{per } t < o) \\ 1 & (\text{per } t \geqslant o) \end{cases}$$

il che giustifica l'aggettivo *unitaria*. Dalla proprietà (29) discende che

$$\mathfrak{L}[U(t)] = \int_{o}^{\infty} e^{-pt}\, U(t)\, dt = 1 \text{ (1)} \tag{30}$$

e quindi *alla costante 1 viene attribuita l'antitrasformata* $U(t)$. E, ad una costante qualunque k, l'antitrasformata $k\,U(t)$.

Ciò posto, ritornando alla (28), si trae, antitrasformando

$$I(t) = C\frac{dV}{dt} + \frac{1}{R}V(t) + C\,V(o)\,.\,U(t)$$

e quel tale guizzo di corrente viene precisamente rappresentato dal terzo termine (impulsivo). Il significato fisico della sua presenza è questo: la carica ha subìto un salto brusco $C\,V(o)$ all'istante $t = 0$.

5. — Finora ho solo accennato al caso di circuiti elettrici che sono inizialmente a riposo; soltanto in questa ipotesi vale l'algoritmo simbolico sopra descritto.

Più generalmente però possiamo pensare che per $t < o$ la nostra rete di circuiti sia già sede di fenomeni noti, e che all'istante $t = o$ avvenga, per una ragione qualsiasi (corto-circuiti, variazioni di carico, ecc.), una brusca modificazione nelle condizioni della rete, onde questa passa ad un nuovo regime di funzionamento, che si tratta di studiare.

Si tratterà allora di integrare equazioni o sistema di equazioni del solito tipo, ma con valori iniziali delle cariche e delle correnti non tutti nulli. Per esempio, riferendoci al solito circuito di fig. 2 e detti rispettivamente Q_o, I_o i valori iniziali (noti) della carica e della corrente, l'equazione (9) viene sostituita dalla

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\left(Q_o + \int_{o}^{t} I\,dt\right) = V(t) \tag{31}$$

(1) Più generalmente, per una funzione impulsiva unitaria ad un istante generico $t = \alpha$ (cioè per la funzione $U(t - \alpha)$), si ha

$$\mathfrak{L}[U(t-\alpha)] = e^{-\alpha p}\,.$$

e la condizione iniziale (10) dalla

$$I(o) = I_0 \, .$$

Ricordando (5), (2), (6), si vede che la trasformazione di Laplace muta la (31) nella

$$L\,[p\,i\,(p) - I_0] + R\,i\,(p) + \frac{1}{C}\left[\frac{Q_0}{p} + \frac{1}{p}\,i\,(p)\right] = v\,(p)$$

ossia

$$(32) \qquad \left(L\,p + R + \frac{1}{C\,p}\right) i\,(p) = v\,(p) + L\,I_0 - \frac{Q_0}{C\,p} \, .$$

Osserviamo ora che, in virtù della (30) e della (2), si ha

$$L\,I_0 = \mathfrak{L}\,[L\,I_0 \, . \, U(t)] \quad , \quad \frac{Q_0}{C\,p} = \mathfrak{L}\left[\frac{Q_0}{C}\right]$$

e perciò la (32) può anche scriversi

$$\left(L\,p + R + \frac{1}{C\,p}\right) i\,(p) = \mathfrak{L}\left[V(t) + L\,I_0 \, . \, U(t) - \frac{Q_0}{C}\right] .$$

Quest'equazione può evidentemente interpretarsi come *equazione simbolica* di un circuito che parta dal riposo, ma nel quale agisca, non solo la f. e. m. $V(t)$, ma anche la f. e. m. *impulsiva* $L\,I_0 \, . \, U(t)$ e la f. e. m. *costante* $-\dfrac{Q_0}{C}$.

Questo mostra che l'algoritmo simbolico può anche applicarsi ai circuiti che non sono a riposo per $t < o$, a patto di computare, fra le f. e. m. agenti, tante f. e. m. impulsive all'istante $t = o$ con impulso uguale a $L\,I_0$ per ogni induttanza L che inizialmente sia attraversata da una corrente non nulla I_0, e tante f. e. m. costanti di intensità $-\dfrac{Q_0}{C}$ per ogni capacità C che inizialmente abbia una carica non nulla Q_0.

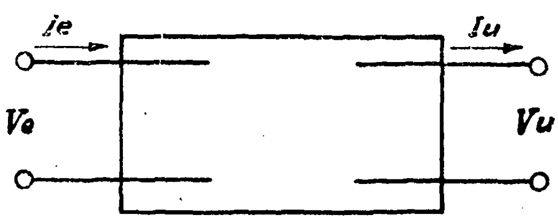

Fig. 5

6. — Fra le più notevoli applicazioni del metodo simbolico vi è da annoverare la teoria dei *filtri elettrici* e delle *linee artificiali.* Il punto di partenza di questa teoria risiede nell'osservazione che il funzionamento di un *quadripolo* (fig. 5) è caratterizzato da una relazione estremamente semplice fra le trasformate di Laplace $v_e(p)$, $i_e(p)$

delle grandezze di entrata $V_e(t)$, $I_e(t)$ e le trasformate di Laplace $v_u(p)$, $i_u(p)$ delle grandezze di uscita $V_u(t)$, $I_u(t)$. Si ha infatti

$$(33) \qquad \begin{cases} v_e(p) = a(p) \,.\, v_u(p) + r(p) \,.\, i_u(p) \\ i_e(p) = g(p) \,.\, v_u(p) + b(p) \,.\, i_u(p) \end{cases}$$

ove $a(p)$, $r(p)$, $g(p)$, $b(p)$ sono quattro funzioni razionali di p (dipendenti dalla struttura interna del quadripolo) legate fra loro dalla relazione

$$a(p)\, b(p) - r(p)\, g(p) = 1 \ .$$

Si ha cioè che il quadripolo opera una sostituzione lineare unimodulare sulle grandezze simboliche.

Senza sviluppare le conseguenze di questo fatto, il che ci porterebbe troppo lontano, fermiamoci piuttosto a considerare il caso di una *linea di trasmissione* di lunghezza finita h e di parametri l, r,

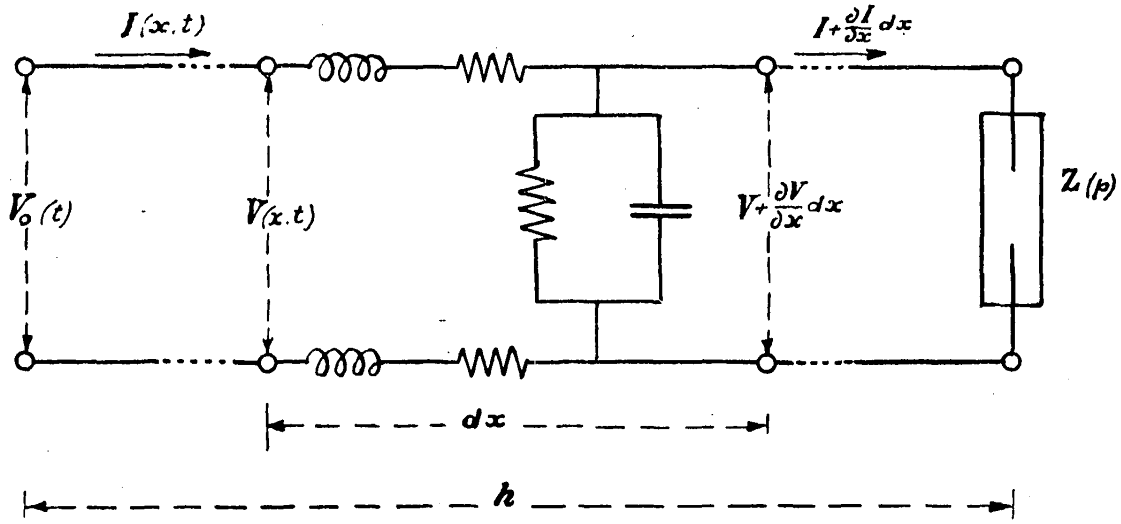

Fig. 6

c, g (rispettivamente *induttanza, resistenza, capacità* e *conduttanza trasversale* per unità di lunghezza). Una tal linea può considerarsi come una successione di infiniti quadripoli infinitesimi, ciascuno con induttanza $l\,d\,x$ e resistenza $r\,d\,x$ in serie, capacità $c\,d\,x$ e conduttanza $g\,d\,x$ in derivazione (fig. 6). Scrivendo le (33) e trascurando gli infinitesimi rispetto a $d\,x$, si perviene facilmente alle

$$(34) \qquad \begin{cases} (l\,p + r)\; i(x, p) = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] (c\,g + g)\; v(x, p) = -\dfrac{\partial i}{\partial x} \end{cases}$$

che legano le trasformate di Laplace

$$v(x,\ p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, V(x,\ t)\, dt \quad , \quad i(x,\ p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, I(x,\ t)\, dt$$

della tensione $V(x, t)$ e della corrente $I(x, t)$ in un punto generico di ascissa x della linea, supposta inizialmente a riposo [1].

Come *condizioni ai limiti*, abbiamo la condizione all'origine $x = o$ che prescrive

$$v(o, p) = v_o(p) \tag{35}$$

ove $v_o(p)$ è la trasformata di Laplace della tensione di alimentazione $V_o(t)$ (assegnata) e la condizione al termine $x = h$ del tipo

$$v(h, p) = z(p) \,.\, i(h, p) \tag{36}$$

ove $z(p)$ è l'espressione simbolica dell'impedenza con cui è caricata la linea (quindi una funzione razionale nota, se tale impedenza è a carattere concentrato).

Eliminando p. es. $i(x, p)$ fra le (34), si trova per $v(x, p)$ la equazione differenziale (alle derivate ordinarie):

$$\frac{d^2 v}{d x^2} - (l p + r)(c p + g)\, v = o$$

di immediata integrazione. Imponendo poi le condizioni (35), (36), si arriva a trovare per la $v(x, p)$ l'espressione seguente:

$$v(x,p) = \frac{z_o(p) \,.\, \operatorname{senh}\left[(h-x)\sqrt{K(p)}\right] + z(p) \,.\, \cosh\left[(h-x)\sqrt{K(p)}\right]}{z_o(p) \,.\, \operatorname{senh}\left[h\sqrt{K(p)}\right] + z(p) \,.\, \cosh\left[h\sqrt{K(p)}\right]} \,.\, v_o(p) \tag{37}$$

ove si è posto:

$$z_o(p) = \sqrt{\frac{l p + r}{c p + g}} \quad \textit{(impedenza caratteristica della linea)}$$

$$K(p) = (l p + r)(c p + g) \quad \textit{(funzione di propagazione).}$$

---

[1] Le (34) non sono altro che le equazioni che si ottengono applicando la trasformazione di Laplace rispetto alla variabile t alle classiche *equazioni di propagazione*

$$l\frac{\partial I}{\partial t} + r I = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad c\frac{\partial V}{\partial t} + g V = -\frac{\partial I}{\partial x}$$

tenendo conto delle *condizioni iniziali*

$$V(x, o) = 0 \quad , \quad I(x, o) = 0$$

che traducono il fatto che la linea è inizialmente a riposo.

Per determinare la tensione effettiva $V(x,t)$ occorre antitrasformare l'espressione (37). Non è il caso di considerare qui un problema così generale; mi limiterò a segnalare che la soluzione è nota nei casi: $z(p) = z_0(p)$ (linea chiusa sull'impedenza caratteristica [1], il che equivale a supporre la linea infinitamente lunga), $z(p) = o$ (linea cortocircuitata), $z(p) = \infty$ (linea aperta), ove la $V(x,t)$ si esprime per mezzo delle *funzioni di Bessel* (se $l \neq o$) o delle *funzioni ellittiche theta di Jacobi* (se $l = o$).

Ma in casi speciali (p. es. in quello delle *linee antidistorcenti* caratterizzate dalla $\frac{r}{l} = \frac{g}{c}$, ossia dall'avere l'impedenza caratteristica costante: $z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}$) la soluzione si può avere molto facilmente.

Terminerò trattando il caso ideale delle *linee senza perdite* ($r = g = o$) che costituiscono un caso particolare delle linee antidistorcenti ora menzionate. Supporrò in più che la linea sia chiusa sull'impedenza caratteristica (che qui si riduce ad una semplice resistenza ohmica $\sqrt{\frac{l}{c}}$).

Allora per $r = g = o$ e quindi $z_0(p) = \sqrt{\frac{l}{c}}$, $K(p) = l c p^2$, e per $z(p) = z_0(p)$, la (37) diventa semplicemente

$$v(x,p) = e^{-\frac{x}{v}p} \,.\, v_0(p) \quad , \quad \left(v = \frac{1}{\sqrt{lc}}\right).$$

L'antitrasformata $V(x,t)$ si ottiene subito osservando che la antitrasformata del fattore $e^{-\frac{x}{v}p}$ è data dalla funzione impulsiva $U\left(t - \frac{x}{v}\right)$ (vedi nota [1] di pag. 12) ed applicando il teorema del prodotto integrale:

$$V(x,t) = U\left(t - \frac{x}{v}\right) \ast V_0(t) \,.$$

Si ha cioè per la tensione cercata:

$$V(x,t) = \int_0^t U\left(\tau - \frac{x}{v}\right) V_0(t-\tau)\, d\tau$$

---

[1] Dal punto di vista teorico questa chiusura non è generalmente possibile con impedenze a carattere concentrato, essendo in generale $z_0(p)$ una funzione *irrazionale* di p. La si può però realizzare con l'approssimazione che si desidera.

e quindi applicando la proprietà fondamentale delle funzioni impulsive:

$$V(x, t) = \begin{cases} 0 & \left(\text{se } t < \frac{x}{v}\right) \\ V_0\left(t - \frac{x}{v}\right) & \left(\text{se } t \geqslant \frac{x}{v}\right) \end{cases}$$

Questa formola mostra all' evidenza che l' onda di tensione si propaga *inalterata* lungo la linea con velocità v.